

Проективная плоскость

8 июля

Опр. Пусть Δ_1 и Δ_2 — две плоскости в пространстве, S — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. Для каждой точки A плоскости Δ_1 проведём прямую SA до пересечения с плоскостью Δ_2 в точке A' . Такое соответствие называется центральной проекцией.

I. Будем считать, что плоскости не параллельны друг другу. Проверьте, что

- (а) Точки Δ_1 , для которых не определён образ, а также точки Δ_2 , для которых нет прообраза, представляют собой две прямые (обозначим их l_1 и l_2 соответственно).
- (б) Если три точки лежали на одной прямой, то и после центрального проектирования они окажутся на одной прямой. Тем не менее, порядок точек может не сохраниться.
- (в) Любые две прямые, параллельные l_1 , снова переходят в параллельные. На них сохраняется отношение коллинеарных векторов.
- (г) Прямые, параллельные друг другу, но не l_1 , переходят в две прямые, которые пересекаются на l_2 .

Опр. Добавим к плоскости множество бесконечно удалённых точек, по одной для каждого семейства параллельных прямых. Будем считать, что каждая такая точка принадлежит всем прямым своего семейства и, соответственно, все эти прямые проходят через одну точку. В свою очередь, все бесконечно удалённые точки образуют одну бесконечно удалённую прямую.

Опр. Прямая, дополненная бесконечно удалённой точкой, называется проективной прямой. Расширенная таким образом плоскость называется проективной плоскостью. Взаимно-однозначное отображение проективной плоскости в себя, которое переводит прямые в прямые, называется проективным преобразованием.

II. Докажите, что

- (а) Через любые две (в т.ч. бесконечно удалённые) точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая. Любые две прямые пересекаются ровно в одной точке.
- (б) Можно доопределить операцию центрального проектирования для бесконечно удалённых точек так, чтобы получилось проективное преобразование.
- (в) Для любых двух точек проективной плоскости существует центральное проектирование, которое отправляет их на бесконечно удалённую прямую.

Загадка. Почему при помощи одной линейки нельзя провести прямую, параллельную данной? Построить середину отрезка?

III. Убедитесь, что любое аффинное преобразование можно дополнить до проективного преобразования, которое переводит бесконечно удалённую прямую в себя.

1. Дана четвёрка точек A, B, C, D , никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что

(а) Существует центральное проектирование, переводящее их в параллелограмм.

(б) Существует проективное преобразование, переводящее их в произвольную четвёрку точек с тем же свойством.

2. Дан угол и точка P внутри него. Из точки P проводятся две прямые, a и b , которые пересекают стороны угла в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Докажите, что ГМТ точек пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1 — одна прямая.

3. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 , AB и A_1B_1 пересекаются в точках A', B' и C' соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а E и F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD , BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L , а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N . Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF .

5. Теорема Дезарга. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.

6. Теорема Паппа. На прямых l_1 и l_2 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что точки

$$X = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad Y = B_1C_2 \cap B_2C_1, \quad Z = C_1A_2 \cap C_2A_1$$

лежат на одной прямой.

7. Продолжения сторон AB и CD , BC и AD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках E и F соответственно. Внутри четырёхугольника отмечена точка P . Прямые EP и BC пересекаются в точке K , а прямые FP и AB в точке M . Докажите, что точка пересечения прямых MC и AK лежит на прямой PD .

8. Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O_1 , а прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в точке O_2 . Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке.